



Numerical investigation of water droplet freezing in warm and cold environments using the lattice Boltzmann method

Amin Vejdani Khoshbakht¹, Omid Reza Mohammadipour^{2*}

¹ M.Sc student, Department of Mechanical Engineering, Payame Noor University, Tehran, Iran.

² Associate Professor, Department of Mechanical Engineering, Payame Noor University, Tehran, Iran.

* 193954697, Tehran, Iran, o.mohammadipour@pnu.ac.ir

Article info

Article history:

Received: 20 Oct 2023

Revised: 14 Nov 2023

Accepted: 27 Nov 2023

Available online: 10 Dec 2023

Keywords:

Droplet solidification
lattice Boltzmann method
Freezing time
Warm environment
Cold environment

<https://doi.org/10.22077/AEC.2023.6888.1022>

Abstract

This study aims to investigate the solidification process of water droplets in both cold and warm environments. Using numerical simulations, a new simple approach has been introduced to predict the freezing time of droplets. Numerical study is based on the free energy lattice Boltzmann method, which employs the Cahn-Hilliard equation to achieve thermodynamic consistency in simulations. Numerical results show that even though a 1D solution is simple, it can still provide good approximations for a significant portion of the freezing process. In this regard, the paper introduces a new concept called one-dimensional equivalent length as a measure of freezing time. Consequently, the way this new concept can be affected by environmental conditions is investigated in detail, revealing that air temperature and contact angle can have the most dominant effects. It has been shown that the presence of cold air around the droplet can reduce the anti-icing performance of hydrophobic surfaces. The way in which the one-dimensional length depends on the Stefan number suggests that ice layer growth in a cold environment is more similar to what happens in 1D solidification. The paper provides a new insight into water solidification and meanwhile introduces a new concept to assess the performance of anti-ice techniques.

بررسی عددی انجماد قطره‌های آب در محیط‌های گرم و سرد به روش لتیس-بولتزمن

امین وجدانی خوشبخت^۱، امید رضا محمدی پور^{۲*}

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

^۲ دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

* ۱۹۳۹۵۴۶۹۷، تهران، ایران، o.mohammadipour@pnu.ac.ir

چکیده	اطلاعات مقاله
این تحقیق چگونگی انجماد قطرات آب در محیط‌های گرم و سرد را بررسی نموده و با تکیه بر نتایج عددی حاصل به دنبال معرفی تقریبی ساده برای پیش‌بینی زمان انجماد است. روش عددی مورد استفاده، روش لتیس-بولتزمن و تقریب مورد استفاده در بخش جریان‌های چند فاز، روش انرژی آزاد است. در این روش بر خلاف رویه غالب از معادله کاهن-هیلبارد برای رهگیری فازهای متفاوت جریان استفاده می‌شود که تطبیق پذیری بیشتری با ترمودینامیک جریان دارد. نتایج حاصل از شبیه‌سازی حاکی از آن است که در بخش قابل توجهی از زمان انجماد، حل یک‌بعدی می‌تواند پیش‌بینی مناسبی از روند انجماد ارائه نماید. با این توصیف، تحقیق پیش روی مفهوم جدیدی تحت عنوان طول یک‌بعدی معادل را به عنوان معیاری از زمان انجماد قطره معرفی می‌نماید و در ادامه به بررسی اثر عوامل مختلف بر این مفهوم می‌پردازد. شبیه‌سازی‌های صورت گرفته نشان می‌دهد، دمای هوا و زاویه تماس قطره با سطح جامد مهمترین عوامل موثر بر طول معادل یک‌بعدی قطره هستند. اثرات متقابل دمای هوا و زاویه تماس به گونه‌ای است که می‌تواند اثربخشی سطوح آبگریز در به تاخیر انداختن انجماد را در محیط‌های سرد کاهش دهد. چگونگی وابستگی طول معادل یک‌بعدی به عدد استفان حاکی از آن است که فرآیند انجماد در محیط‌های سرد همخوانی بیشتری با الگوی انجماد یک‌بعدی خواهد داشت. نتایج حاصل از این تحقیق می‌تواند نقش به‌سزایی در درک پدیده انجماد قطره‌های آب داشته و مبنای جدیدی را در ارزیابی روش‌های پیشگیری از انجماد معرفی نماید.	<p>تاریخچه مقاله:</p> <p>دریافت: ۲۰/۰۷/۲۸</p> <p>بازنگری: ۲۰/۰۸/۲۳</p> <p>پذیرش: ۲۰/۰۹/۰۶</p> <p>نشر برخط: ۲۰/۰۹/۱۹</p> <p>کلمات کلیدی:</p> <p>انجماد قطره</p> <p>روش لتیس-بولتزمن</p> <p>زمان انجماد</p> <p>محیط گرم</p> <p>محیط سرد</p>

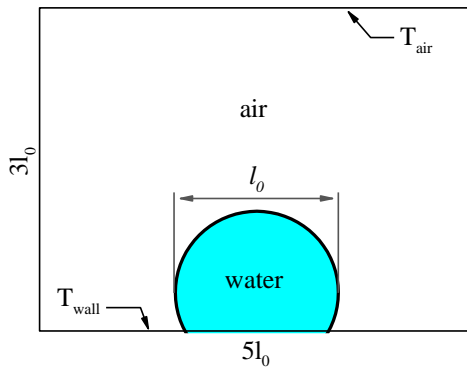


Fig. 1. Geometry and boundary conditions used for simulation of water droplet freezing.

شکل ۱. هندسه و شرایط مرزی مورد استفاده در شبیه‌سازی انجماد قطره آب.

۲ - انجماد قطره آب

مسئله مورد بررسی انجماد یک قطره آب است که بر روی سطح به صورت ایستا مستقر گردیده است. فضای پیرامون قطره توسط سیال دیگر (هوا) اشغال شده است. از اثرات جاذبه بر شکل نهایی قطره صرف نظر شده و سطح جامد می‌تواند آبدوست یا آبگریز باشد. در طول شبیه‌سازی دمای سطح پایین‌تر از دمای اولیه قطره و کمتر از دمای انجماد آب ثابت نگاه داشته می‌شود که انجماد قطره را در پی خواهد داشت. در این بین هوا نیز تحت تاثیر سطح سرد، تغییرات دما را تجربه خواهد کرد. هندسه و شرایط مرزی این مسئله در شکل (۱) نشان داده شده است.

در فشار یک اتمسفر دمای تعادلی انجماد آب 0°C است. با این وجود به هنگام سرد شدن آب در حالت مایع، دما می‌تواند به زیر صفر افت نماید بدون آن‌که تبدیل فاز رخ دهد. طبیعی است در این حالت وضعیت آب از نظر ترمودینامیکی غیرتعادلی است. با یک اغتشاش کوچک در شرایط محیط، این وضعیت غیرتعادلی از دست خواهد رفت. بخشی از آب منجمد می‌شود و انرژی آزاد شده در این فرآیند، دمای قطره را به نقطه تعادلی (0°C) باز می‌گرداند. در نهایت سیال مخلوطی از آب و یخ در دمای تعادلی خواهد بود. بازگشت آب از شرایط غیرتعادلی به دمای 0°C ، در کسری از ثانیه رخ می‌دهد [۱۹] و در این تحقیق مورد بررسی قرار نخواهد گرفت. در مقابل نتیجه این فرآیند به عنوان شرط اولیه در شبیه‌سازی اعمال خواهد شد. به این ترتیب در لحظه $t = 0\text{s}$ قطره مخلوطی همگن از آب و یخ در دمای 0°C خواهد بود. این مخلوط در این تحلیل به عنوان یک مایع با خواص برابر با میانگین خواص آب و یخ در نظر گرفته خواهد شد. با این وجود در تمام معادلات پیش‌رو، از خواص متوسط آب و یخ به عنوان خواص "آب" یاد می‌شود.

۳ - روش عددی

روش انرژی آزاد در لتیس-بولتزمن، مبتنی بر معرفی یک شاخص جزء ϕ برای رهگیری اجزای متفاوت جریان سیال است. در حقیقت مقدار عددی این شاخص می‌تواند معرف حضور یا عدم حضور یک جزء در فضای حل باشد. به طور مثال برای شبیه‌سازی آب و هوا مقدار شاخص به صورت زیر تفسیر می‌شود.

$$\phi = \begin{cases} +\phi_0 & \text{water} \\ |\phi| < \phi_0 & \text{Interface} \\ -\phi_0 & \text{air} \end{cases} \quad (1)$$

پارامتر ϕ_0 یک عدد مثبت و غیر صفر است که در این مطالعه برابر با $\phi_0 = 0.25$ در نظر گرفته شده است. معادله حاکم بر شاخص جزء، معادله کاهن-هیلیارد است که در این تحقیق نسخه ویرایش شده‌ی آن برای در نظر گرفتن اثرات جریان مورد استفاده قرار گرفته است [۲۰]:

انجماد قطرات بر روی سطوح کاربردهای زیادی در صنعت از قبیل پوشش دهی سطوح، پرینترهای سه بعدی، جوش‌های لیزری و ... دارند. با این وجود در بعضی از صنایع، رخ دادن چنین پدیده‌ای می‌تواند نامطلوب تلقی گردد. شکل‌گیری یخ بر روی سطوح، آیرودینامیک قطعات را به طور قابل ملاحظه‌ای تغییر داده و عملکرد آن‌ها را تحت تاثیر قرار می‌دهد. از این رو تکنیک‌هایی مبتنی بر تاخیر انجماد توجه تعداد زیادی از محققین را به خود معطوف ساخته است. انجماد قطرات آب به عنوان یک نمونه کلاسیک بارها به صورت آزمایشگاهی [۳-۱]، تحلیلی [۴-۵] و عددی [۶-۸] مورد بررسی قرار گرفته است. با ظهور روش‌های جدید عددی همچون روش لتیس-بولتزمن، موضوع انجماد و شبیه‌سازی آن در دیدگاه مزوسکوپیک مورد توجه ویژه قرار گرفته است. اصولاً پیگیری تحولات مرز مشترک در جریان‌های چند فازی بسیار پیچیده و از نظر محاسباتی پرهزینه است. در چنین شرایطی ارائه راهکارهای ابتکاری برای باز تولید سطوح مشترک در دیدگاه مزوسکوپیک توانست هزینه‌های محاسباتی چنین شبیه‌سازی‌هایی را به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش دهد. تحقیقات روئمن و کور [۹] را می‌توان در زمره اولین تلاش‌های موفق در این زمینه قلمداد نمود. شان و چن [۱۰] با تکامل این ایده، بستر مناسبی برای شبیه‌سازی جریان‌های چند فازی محیا نمودند که بعدها مبنای تقریباً تمامی پژوهش‌های عددی مبتنی بر لتیس-بولتزمن در محسب انجماد جریان‌های دوفازی قرار گرفت [۱۱-۱۵]. در روش شان و چن نیروی فرضی برای مدل‌سازی اثرات متقابل فازهای متفاوت در نظر گرفته شده است که شدت آن تعیین‌کننده مفاهیم ماکروسکوپیک همچون کشش سطحی و نسبت چگالی است. هی و دولن [۱۶] نشان دادند روش ارائه شده در مدل شان و چن از بعضی جهات با ترمودینامیک جریان همخوانی ندارد. سویتف [۱۷] و همکارانش [۱۷] با تکیه بر اهمیت همخوانی ترمودینامیکی، روش انرژی آزاد را برای شبیه‌سازی جریان‌های دوفازی در لتیس-بولتزمن ارائه نمودند. در این روش نیروی فرضی با یک معادله فیزیکی (معادله کاهن-هیلیارد) جایگزین شد که نه تنها تطابق ترمودینامیکی را به شبیه‌سازی‌های جریان چند فازی بازگرداند بلکه آزادی عمل بیشتری در تعیین پارامترهای ماکروسکوپیک فراهم آورد. با این وجود مرور تحقیقات پیشین حاکی از آن است که تقریباً تمامی شبیه‌سازی‌های انجماد در جریان‌های چند فازی بر مبنای مدل شان-چن صورت گرفته است. این تحقیق بر آن است که با تکیه بر مدل انرژی آزاد به بررسی یک مسئله کلاسیک در انجماد چند فازی یعنی انجماد قطره آب بپردازد.

در محسب انجماد قطرات آب، اثرات آبدوستی سطوح، نقطه مشترک بخش عمده‌ای از تحقیقات به شمار می‌رود. در سطوح آبگریز سطح تماس قطرات با سطح سرد کاهش می‌یابد و موجب تاخیر در انجماد خواهد شد. تمرکز توجه بر روی این موضوع در تحقیقات موجب شده تا سطح مشترک آب و هوا به یک مرز ساده حرارتی (مرز دما ثابت [۴] یا مرز آدیاباتیک [۱۸]) تقلیل یابد. با این وجود مرور خواص حرارتی هوا حاکی از آن است که هوا با توجه به داشتن نفوذ حرارتی بالا می‌تواند بسیار سریع‌تر از آب تحت تاثیر دمای سطح سرد قرار گیرد. به این ترتیب با توجه به شرایط محیط، تعامل حرارتی آب و هوا می‌تواند نقشی تعیین‌کننده در پدیده انجماد قطره‌های آب داشته باشد. بررسی چنین شرایطی هدف اصلی تحقیق پیش رو است.

پس از مرور بر تاریخچه و اهمیت موضوع، بخش دوم مقاله به معرفی مسئله، هندسه و فرضیات تحقیق می‌پردازد. بخش سوم به روش عددی اختصاص داده شده است که در آن روش لتیس-بولتزمن انرژی آزاد و چگونگی تطبیق آن با تغییر حالت جامد-مایع تشریح می‌گردد. بخش چهارم به بررسی انجماد آب در محیط‌های متفاوت می‌پردازد و در انتها بخش پنجم جمع بندی نتایج حاصل را ارائه می‌نماید.

1. Rothman and Keller
2. Shan and Chen
3. He and Doolen
4. Swift
5. Cahn-Hilliard
6. Thermal diffusivity

$$F_i = w_i \frac{2\tau_f - 1}{2\tau_f} \left(\frac{e_{i\beta} u_\beta}{c_s^2} + \frac{e_{i\beta} u_\beta e_{i\alpha} u_\alpha}{2c_s^4} - \frac{u_\beta u_\beta}{2c_s^2} \right) \times \left(\frac{e_{i\alpha} - u_\alpha}{c_s^2} \right) (c_s^2 \partial_\alpha \rho) \quad (12)$$

چگالی، سرعت و توزیع تعادلی $f_i^{eq}(x, t)$ به صورت زیر محاسبه می‌گردد [۲۱]:

$$f_i^{eq}(x, t) = w_i \rho \left(\frac{\rho_0}{\rho} + \frac{e_{i\beta} u_\beta}{c_s^2} + \frac{e_{i\beta} u_\beta e_{i\alpha} u_\alpha}{2c_s^4} - \frac{u_\beta u_\beta}{2c_s^2} \right) \quad (13)$$

$$\rho(x, t) = \rho_{air} + \frac{\phi + \phi_0}{2\phi_0} (\rho_{water} - \rho_{air}) \quad (14)$$

$$\rho_0(x, t) = \sum_i f_i + \frac{1}{2} \delta t (u_\alpha \partial_\alpha \rho) \quad (15)$$

$$\rho u = \sum_i f_i e_i - \frac{1}{2} \delta t (\phi \partial_\alpha \mu_\phi) \quad (16)$$

ثابت تخفیف زمانی (τ_f) تابع لزجت سینماتیکی (ϑ) است:

$$\vartheta = \vartheta_{air} + \frac{\phi + \phi_0}{2\phi_0} (\vartheta_{water} - \vartheta_{air}) \quad (17)$$

$$\tau_f = \frac{\vartheta}{c_s^2 \delta t} + \frac{1}{2} \quad (18)$$

برای حل معادله انرژی لازم است ابتدا شکل ماکروسکوپیک این معادله را با جریان چند فازی تطبیق دهیم. این امر مستلزم انجام یکسری فرضیات و تعاریف جدید خواهد بود. در جریان دو جزئی (آب و هوا)، فرض پایه در تحقیق پیش رو این است که تنها یک جز (آب) تغییر حالت را تجربه خواهد کرد و جز دیگر (هوا) همواره در حالت سیال باقی می‌ماند. اگر نسبت سیال موجود در هر بخشی از فضای حل را با (f_L) نشان دهیم، این مقدار همواره در هوا برابر با 1 و در آب متناسب با دما، مقداری بین 0 و 1 خواهد داشت.

معادله انرژی برحسب آنتالپی به صورت ذیل بیان می‌شود:

$$\partial_t H + \partial_\alpha (H u_\alpha) = \partial_\beta (k \partial_\beta T) \quad (19)$$

آنتالپی H را با توجه به اجزای جریان می‌توان بر حسب شاخص جزء بیان نمود:

$$H = H_{air} + \frac{\phi + \phi_0}{2\phi_0} (H_{water} - H_{air}) \quad (20)$$

ظرفیت حرارتی حجمی^۲ و ضریب رسانندگی موثر جریان به صورت ذیل محاسبه می‌شود.

$$(\rho c)_{eff} = \frac{\phi - \phi_0}{2\phi_0} (\rho c)_{air} + \frac{\phi + \phi_0}{2\phi_0} (\rho c)_{water} \quad (21)$$

$$k_{eff} = \frac{\phi - \phi_0}{2\phi_0} k_{air} + \frac{\phi + \phi_0}{2\phi_0} k_{water} \quad (22)$$

با استفاده از خواص موثر جریان و همچنین گرمای نهان انجماد (L_h)، آنتالپی جریان محاسبه خواهد شد.

$$\partial_t \phi + \partial_\alpha (\phi u_\alpha) = M \partial_\beta \partial_\beta \mu_\phi \quad (2)$$

در این رابطه M ضریب تحرک^۱ و μ_ϕ پتانسیل شیمیایی است که برحسب شاخص جزء به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$\mu_\phi = 4A(\phi^3 - \phi_0^2 \phi) - k \partial_\alpha \partial_\alpha \phi \quad (3)$$

ضخامت سطح مشترک دو سیال (λ) و ضریب کشش سطحی (σ) برحسب پارامترهای عددی A و k به صورت زیر بیان خواهد شد.

$$\lambda = \frac{1}{\phi_0} \sqrt{\frac{2k}{A}} \quad (4)$$

$$\sigma = \frac{4}{3} \sqrt{2kA} \phi_0^3 \quad (5)$$

۱-۳- معادلات لتیس- بولتزمن

معادله لتیس- بولتزمن هم ارز با معادله (۳) به صورت زیر است [۲۱]:

$$h_i(x + e_i \delta t, t + \delta t) = h_i(x, t) - \frac{h_i(x, t) - h_i^{eq}(x, t)}{\tau_h} \quad (6)$$

تابع توزیع تعادلی (h_i^{eq})، ثابت تخفیف زمانی (τ_h)، و مقدار شاخص فاز در زمان t و مکان x ، به صورت زیر محاسبه خواهد شد.

$$h_{i \neq 0}^{eq}(x, t) = w_i \left(\frac{\Gamma \mu_\phi}{c_s^2} + \frac{\phi e_{i\beta} u_\beta}{c_s^2} + \frac{\phi e_{i\beta} u_\beta e_{i\alpha} u_\alpha}{2c_s^4} - \frac{\phi u_\beta u_\beta}{2c_s^2} \right) \quad (7)$$

$$h_{i=0}^{eq}(x, t) = \phi - \sum_{i \neq 0} h_i \quad (8)$$

$$\tau_h = \frac{M}{\Gamma \delta t} + \frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\phi = \sum_i h_i \quad (10)$$

تعیین میدان سرعت (u_α) نیازمند حل معادله لتیس- بولتزمن دیگری به فرم ذیل است:

$$f_i(x + e_i \delta t, t + \delta t) = f_i(x, t) - \frac{f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t)}{\tau_f} + G_i + F_i \quad (10)$$

که در آن F_i و G_i از روابط (۱۱) و (۱۲) بدست می‌آید [۲۱].

$$G_i = w_i \frac{2\tau_f - 1}{2\tau_f} \left(1 + \frac{e_{i\beta} u_\beta}{c_s^2} + \frac{e_{i\beta} u_\beta e_{i\alpha} u_\alpha}{2c_s^4} - \frac{u_\beta u_\beta}{2c_s^2} \right) \times \left(\frac{e_{i\alpha} - u_\alpha}{c_s^2} \right) (-\phi \partial_\alpha \mu_\phi) \quad (11)$$

در رابطه (۳۰) نشان‌دهنده عملگر برخورد شامل تمام اثرات نیروی و چشمه است که پیش از این در رابطه (۱۰) معرفی شده است. عملگر Ω_i^{solid} جهت اعمال برش معکوس^۱ بر روی توابع موجود در حوزه جامد مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\Omega_i^{solid} = l_{opp(i)}(x, t) - l_i(x, t) \quad (31)$$

پارامتر عددی B به گونه ای تعریف می‌شود که عملگر Ω_i^{solid} را بر روی نواحی جامد متمرکز نماید [۲۴].

$$B = \frac{\tau - 0.5}{\tau - 0.5 + f_L} (1 - f_L) \quad (32)$$

لازم به ذکر است که تصحیح معرفی شده در رابطه (۳۱) تنها برای توابع $h_i(x, t)$ و $f_i(x, t)$ اعمال خواهد شد.

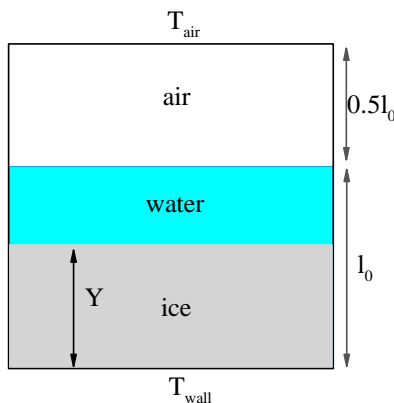


Fig. 2. Freezing process of water layer in one-dimensional domain.

شکل ۲. انجماد لایه آب در فضای یک‌بعدی.

۳-۳- اعتبارسنجی

در این پژوهش معادله انرژی با مفاهیم موجود در روش انرژی آزاد تطبیق داده شده است (معادله (۲۴)) و بواسطه آن معادله لتیس- بولتزمن (۲۵) به کار گرفته شده است. برای سنجش صحت این معادلات، حالت ساده شده‌ای از مساله مطابق شکل (۲) در نظر گرفته می‌شود.

در این حالت لایه‌ای از آب به ضخامت l_0 در تماس حرارتی با سطح سرد قرار گرفته است. آب و هوا در دمای تعادلی انجماد (T_m) قرار دارند. در حالی که دمای سطح (T_{wall}) ثابت و پایین تر از دمای انجماد است. انجماد در تماس با سطح آغاز خواهد شد و با گذشت زمان به ضخامت لایه یخ (Y) افزوده می‌شود. با در نظر گرفتن بقای جرم و انرژی پیرامون سطح مشترک آب و یخ می‌توان نرخ تغییرات ضخامت لایه یخ را محاسبه نمود.

$$\frac{dY}{Y} = \frac{k_{water}(T_m - T_{wall})}{\rho_{water}L_h} dt$$

$$Y = \sqrt{2 \frac{k_{water}(T_m - T_{wall})}{\rho_{water}L_h} t} \quad (33)$$

در رابطه (۳۳) پارامتر (L_h) نشان دهنده گرمای نهان ذوب است. اعداد بدون بعد حاکم بر این پدیده اعداد استفان^۳ و فوریه^۴ است.

$$H = (\rho c)_{eff} T + \frac{\phi + \phi_0}{2\phi_0} \rho_{water} f_L L_h \quad (23)$$

به این ترتیب معادله انرژی جریان چند جزئی به صورت ذیل استخراج می‌گردد.

$$\partial_t T + \partial_\alpha (T u_\alpha) = \frac{k_{eff}}{(\rho c)_{eff}} \partial_\beta \partial_\beta T - \frac{\phi + \phi_0}{2\phi_0} \frac{\rho_{water} L_h}{(\rho c)_{eff}} \partial_t f_L \quad (24)$$

برای حل این معادله در روش لتیس- بولتزمن، معادله مزوسکوپیک (۲۵) مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

$$g_i(x + e_i \delta t, t + \delta t) = g_i(x, t) - \frac{g_i(x, t) - g_i^{eq}(x, t)}{\tau_g} + S_i \quad (25)$$

تابع توزیع تعادلی g_i^{eq} و جمله چشمه S_i به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$g_i^{eq}(x, t) = w_i T \left(1 + \frac{e_{i\beta} u_\beta}{c_s^2} + \frac{e_{i\beta} u_\beta e_{i\alpha} u_\alpha}{2c_s^4} - \frac{u_\beta u_\beta}{2c_s^2} \right) \quad (26)$$

$$S_i(x, t) = w_i \left(1 + \left(\frac{2\tau_g - 1}{2\tau_g} \right) \frac{e_{i\alpha} u_\alpha}{c_s^2} \right) \left(\frac{\phi + \phi_0}{2\phi_0} \frac{\rho_{water} L_h}{(\rho c)_{eff}} \partial_t f_L \right) \quad (27)$$

مقادیر ماکروسکوپیک دما و ثابت تخفیف زمانی به ترتیب توسط روابط (۲۸) و (۲۹) مشخص می‌گردد.

$$T(x, t) = \sum_i f_i \quad (28)$$

$$\tau_g = \frac{k_{eff}}{(\rho c)_{eff} c_s^2} \frac{1}{\delta t} + \frac{1}{2} \quad (29)$$

۲-۳- شرایط مرزی

در شبیه‌سازی انجماد سیال دو نوع جامد وجود خواهد داشت: جامدی که در مرز حوزه قرار دارد و محل اعمال شرایط مرزی است و دیگری جامدی که درون حوزه حل قرار دارد و بواسطه افت دما از سیال به جامد تبدیل شده است. برای مدل سازی نوع اول از شرایط مرزی موجود [۲۲] استفاده شده است. زاویه تماس قطره با آب نیز که نشان دهنده میزان آبدوستی سطح خواهد بود، به کمک تقریب ارائه شده در مرجع [۲۳] اعمال گردیده است. در خصوص بخشی از سیال که در حین شبیه‌سازی به جامد تبدیل می‌شود، توابع توزیع مجهولی (آنگونه که در شرایط مرزی رخ می‌دهد) وجود نخواهد داشت. در این حالت تغییرات باید در مرحله برخورد بر روی توابع توزیع اعمال گردد. برای این منظور معادله لتیس- بولتزمن به صورت ذیل برای تابع توزیع عمومی $l_i(x, t)$ تصحیح می‌شود:

$$l_i(x + e_i \delta t, t + \delta t) = l_i(x, t) + (1 - B)\Omega_l + B\Omega_l^{solid} \quad (30)$$

در رابطه (۳۰) نشان‌دهنده عملگر برخورد شامل تمام اثرات نیروی و چشمه است که پیش از این در رابطه (۱۰) معرفی شده است. عملگر Ω_l^{solid} جهت اعمال برش معکوس^۱ بر روی توابع موجود در حوزه جامد مورد استفاده قرار می‌گیرد.

2. Bounce-back
3. Stefan number
4. Fourier number

1. Bounce-back

$$\theta = \frac{T - T_m}{T_m - T_{wall}} \quad (39)$$

در این بررسی اثرات هوا در دو دمای متفاوت اعمال می‌شود. در یک حالت دمای هوا برابر با دمای سطح در نظر گرفته شده است ($\theta_{air} = -1$). در این حالت که از آن به عنوان "هوای سرد" یاد خواهیم کرد، محیط پیرامون قطره در تمام سطوح مشترک آن با هوا و سطح جامد یکسان خواهد بود. در حالت دوم، دمای هوا بالاتر از سطح زیرین در نظر گرفته شده ($\theta_{air} = +1$) و شرایط آن به عنوان "هوای گرم" تلقی خواهد شد.

هدف در این بخش بررسی زمان انجماد در سطوح با شرایط متفاوت آبریزی است. سطح در دو حالت آب گریز با زاویه تماس $\theta_c = 120^\circ$ و آب دوست با زاویه تماس $\theta_c = 60^\circ$ مدل سازی شده است. زمان انجماد و به طور کلی زمان در این تحقیق به کمک عدد بدون بعد فوریه گزارش خواهد شد.

۴-۱- انجماد در هوای سرد

قطره از طریق دو سطح از محیط پیرامون خود جدا شده است. یک سطح مسطح در زیر قطره که آب را از سطح جامد جدا کرده است و سطحی منحنی در قسمت فوقانی که با هوا به اشتراک گذاشته شده است. شکل (۴) وضعیت انجماد آب را در دو زمان $Fo = 2.5$ (ردیف پایین) و $Fo = 5.0$ (ردیف بالا) برای سطح آبدوست (چپ) و آبریز (راست) نشان داده است. در این تصویر برای نمایش یخ در قطره از ضریب جامد (F_S) استفاده شده است.

$$F_S = (1 - F_L) \frac{\phi + \phi_0}{2\phi_0} \quad (40)$$

در سطح پایین (سطح جامد) دما در $\theta_{wall} = -1$ ثابت شده است (شرط مرزی). در سطح فوقانی، هوا در لحظات ابتدایی دمای $\theta = -1$ (شرط اولیه) را تجربه می‌کند اما در ادامه در تعامل حرارتی با قطره آب، دمای پی‌بعد شده‌ای بین 0 و 1- را تجربه خواهد کرد. از همین رو همانطور که در شکل (۴) نشان داده شده است، شدت انجماد در سطح فوقانی کمتر از آن چیزی است که در سطح زیرین رخ می‌دهد. ضخامت لایه یخ در سطح فوقانی و زیرین به ترتیب با h و H نشان داده شده است. در سطوح آبدوست، قسمت اعظم آب در مجاورت سطح سرد قرار گرفته است. از همین رو انجماد در سطوح آبدوست با سرعت بیشتری رخ خواهد داد. در شکل (۴) مشاهده می‌شود، در $Fo = 5.0$ تمام آب در سطح آبدوست منجمد شده است. در حالی که در شرایط مشابه در سطح آبریز، تنها 87% قطره به یخ تبدیل شده است. تغییرات زمانی ضخامت یخ در سطح زیرین (H) و مجموع ضخامت فوقانی و زیرین ($H + h$) برای سطوح آبدوست (آبی) و آبریز (سبز) در شکل (۵) ترسیم شده است. فارغ از شرایط آبدوستی سطوح، مشاهده می‌شود انجماد در لایه فوقانی با تاخیر آغاز خواهد شد. در سطح آبدوست، انجماد لایه فوقانی در $Fo = 3.0$ آغاز شده است و در سطح آبریز زمان شروع انجماد فوقانی $Fo = 3.5$ است. در هر دو سطح، انجماد لایه زیرین با حل تحلیلی (نشان داده شده به صورت خط چین در شکل (۵)) تطابق قابل توجهی دارد. در شکل (۴) (ردیف پایین) نیز این تطبیق به صورت برابر بودن ضخامت یخ در قسمت میانی قطره‌ها در هر دو سطح آبدوست و آبریز قابل مشاهده است.

$$Ste = \frac{c(T_m - T_{wall})}{L_h} \quad (34)$$

$$Fo = \frac{\alpha t}{l_0^2} \quad (35)$$

بدین ترتیب ضخامت پی‌بعد شده یخ را می‌توان به صورت ذیل بیان نمود.

$$Y^* = \frac{Y}{l_0} = \sqrt{2 \cdot Ste_{water} \cdot Fo} \quad (36)$$

شکل (۳) نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی را با مقادیر بدست آمده از حل تحلیلی (۳۶) مقایسه می‌کند. تطبیق کامل نتایج در اعداد استفان متفاوت حاکی از صحت روابط معرفی شده در این پژوهش می‌باشد.

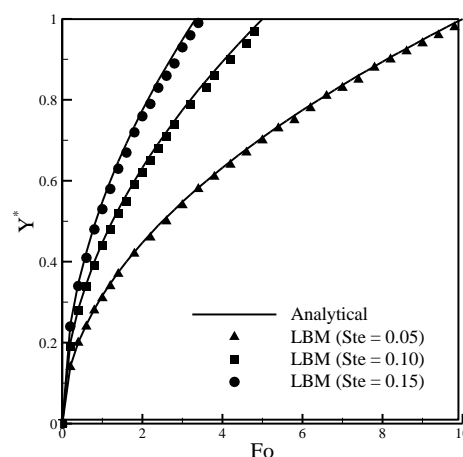


Fig. 3. Comparison of numerical results obtained from LB simulation with those predicted by analytical solution for three Stefan numbers of $Ste = 0.05, 0.1, \text{ and } 0.15$.

شکل ۳. مقایسه نتایج عددی بدست آمده از لیبس- بولتزن با حل تحلیلی یک‌بعدی در اعداد استفان $Ste = 0.05, 0.1 \text{ and } 0.15$.

۴ - انجماد قطره آب

پس از اعتبارسنجی روش عددی، انجماد قطره آب بر روی سطوح مورد بررسی قرار می‌گیرد. سیال احاطه کننده آب، هوا است. با توجه به عدم وجود حرکت قطره و ناچیز بودن اثرات اینرسی، اختلاف چگالی آب و هوا در این شبیه‌سازی تأثیری نخواهد داشت. با این فرض نسبت چگالی 7 برای آب و هوا در نظر گرفته شده است. در بخش حرارتی پارامترهای موثر، ضریب نفوذ حرارتی ($\alpha = k/\rho c$) و اینرسی حرارتی ($e = \sqrt{k\rho c}$) است. پارامترهای شبیه‌سازی به گونه‌ای اعمال شده است که نسبت این پارامترها با خواص حرارتی مخلوط آب-یخ و هوا منطبق باشد.

$$\frac{\alpha_{Air}}{\alpha_{Water}} = 33 \quad (37)$$

$$\frac{e_{Air}}{e_{Water}} = 0.003 \quad (38)$$

دمای سطح (T_{wall}) در تمام مراحل شبیه‌سازی ثابت و متناظر با عدد استفان $Ste = 0.05$ انتخاب شده است. دمای هوا به کمک دمای پی‌بعد شده θ محاسبه خواهد شد.

منتهی به شکل گیری پوسته یخی پیرامون قطره نمی شود. تغییرات زمانی ضخامت یخ در شکل (V) نشان می دهد که تا پایان انجماد قطره $h = 0$ باقی می ماند.

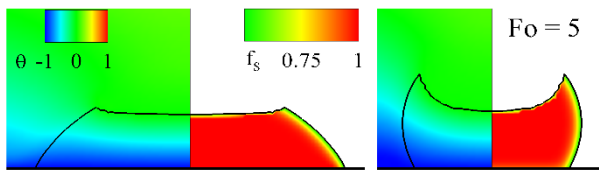


Fig. 6. The distribution of solid fraction and dimensionless temperature inside the freezing droplet at $Fo = 5$ for hydrophilic (left) and hydrophobic (right) surfaces.

شکل ۶. توزیع دما و ضریب جامد درون قطره در حال انجماد در زمان $Fo = 5.0$ برای سطوح آبدوست (چپ) و آبگریز (راست).

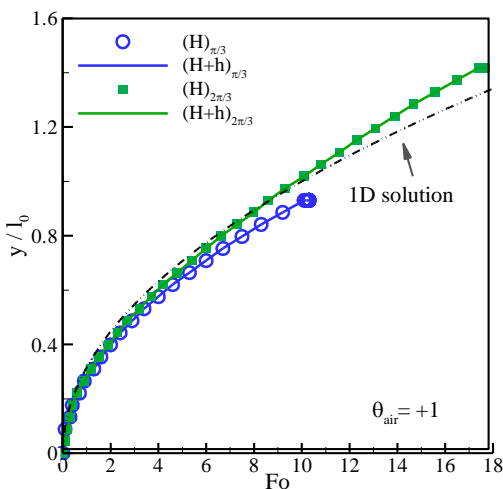


Fig. 7. Variation of lower ice layer thickness (H) and total ice layer thickness ($H + h$) during the solidification process in warm environment $\theta_{air} = +1$ for hydrophilic (blue) and hydrophobic (green) surfaces.

شکل ۷. تغییرات ضخامت لایه یخ در پایین قطره (H) و ضخامت کل لایه یخ ($H + h$) در هوای گرم برای سطوح آبدوست (آبی) و آبگریز (سبز).

۳-۴- طول یک بعدی معادل قطره

مقایسه تغییرات ضخامت یخ با حل تحلیل در هر دو حالت هوای گرم و هوای سرد (شکل های (۵) و (۷)) حاکی از این است که حل تحلیلی در بازه قابل توجهی از زمان انجماد به خوبی می تواند گسترش لایه یخ را پیش بینی نماید. به این ترتیب می توان با استفاده از زمان انجماد قطره حاصل از شبیه سازی Fo_{num} ، طول یک بعدی معادلی را برای قطره استخراج نمود که به ازای آن معادله (۳۶) برقرار باشد.

$$L_{1D}^* = \sqrt{2 \cdot Ste \cdot Fo_{num}} \quad (41)$$

به بیان دیگر رابطه (۴۱) به دنبال همسان سازی انجماد قطره سیال با حالتی است که در آن لایه ای یک بعدی از سیال منجمد می شود. به طور مثال برای قطره ای به قطر l_0 که طول معادلی برابر با L_{1D}^* دارد، شرایط انجماد همانند لایه ای مسطح از آب با ضخامت $l_0 L_{1D}^*$ خواهد بود که در مجاورت هوایی با دمای $\theta_{air} = 0$ انجماد را تجربه می کند. به این ترتیب طول معادل یک بعدی می تواند به عنوان معیاری از سنجش زمان انجماد تلقی شود. در مقایسه با عدد فوریه، طول یک بعدی حساسیت کمتری به دمای سطح دارد. این امر اجازه می دهد تا سایر عوامل موثر با دقت بیشتری ارزیابی گردد.

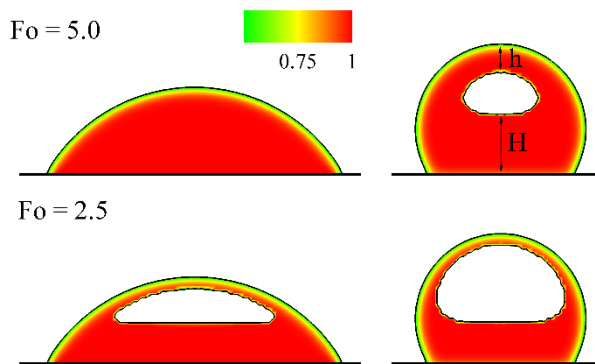


Fig. 4. The distribution of solid fraction inside the freezing droplet at dimensionless times of $Fo = 2.5$ (lower row) and $Fo = 5$ (upper row) for hydrophilic (left) and hydrophobic (right) surfaces.

شکل ۴. توزیع ضریب جامد درون قطره در حال انجماد در زمان های $Fo = 2.5$ (ردیف پایین) و $Fo = 5.0$ (ردیف بالا) برای سطوح آبدوست (چپ) و آبگریز (راست).

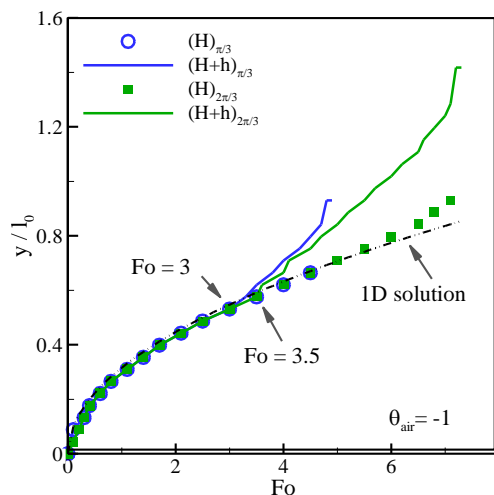


Fig. 5. Variation of lower ice layer thickness (H) and total ice layer thickness ($H + h$) during the solidification process in cold environment $\theta_{air} = -1$ for hydrophilic (blue) and hydrophobic (green) surfaces.

شکل ۵. تغییرات ضخامت لایه یخ در پایین قطره (H) و ضخامت کل لایه یخ ($H + h$) در هوای سرد برای سطوح آبدوست (آبی) و آبگریز (سبز).

۲-۴- انجماد در هوای گرم

در هوای گرم، هوا و قطره آب هر دو تحت تاثیر سطح سرد قرار گرفته و حرارت از دست خواهند داد. از آنجایی که در این حالت انجماد تنها در سطح زیرین قطره رخ می دهد، زمان انجماد بیشتر از شرایط مشابه در هوای سرد خواهد بود. همان طور که در شکل (۶) نشان داده شده است، در $Fo = 5.0$ انجماد در هیچ کدام از قطره ها تکمیل نشده است. در سطح آبدوست (سمت چپ) انجماد به میزان 78% و در سطح آبگریز (سمت راست) انجماد به میزان 60% پیشروی داشته است. اگرچه زمان انجماد در هوای گرم نسبت به هوای سرد افزایش یافته است، اما کمکان این انجماد در سطوح آبدوست با سرعت بیشتری نسبت به سطوح آبگریز پیشروی می کند. همان طور که در شکل (۶) نشان داده شده است، تا زمان $Fo = 5.0$ انجماد محدود به قسمت زیرین قطره بوده و لایه یخ در سطح فوقانی شکل نگرفته است. هوا بواسطه مجاورت با سطح سرد کاهش دما را تجربه خواهد کرد. توزیع دمای در شکل (۶) موید این است که نفوذ دمای سرد در هوا سریعتر از آن چیزی است که درون قطره رخ داده است. علت این امر بالاتر بودن ضریب نفوذ حرارتی هوا نسبت به آب (معادله (۳۷)) و عدم تغییر فاز هوا در طول این سرمایش خواهد بود. نفوذ بیشتر دمای سرد در هوا نهایتاً منتهی به انحای سطح انجماد به سمت بالا خواهد شد. اگرچه این انحنا در سطح آبگریز بیشتر از سطح آبدوست است اما این تغییر شکل

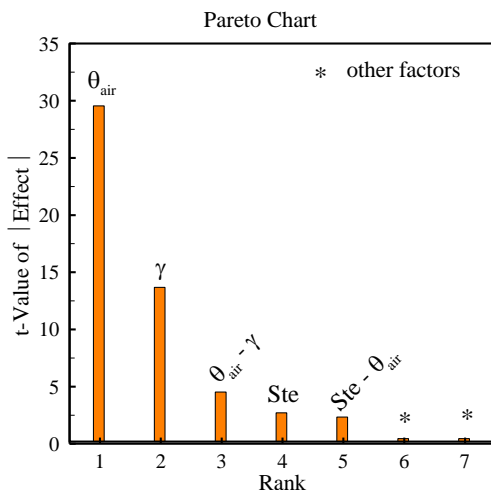


Fig. 8. Ranking parameters' effects on one-dimensional equivalent length. شکل ۸. رتبه بندی عوامل موثر بر طول یک بعدی معادل قطره.

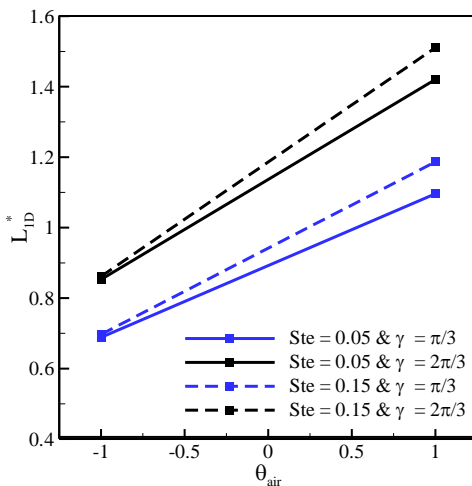


Fig. 9. The effects of air temperature and contact angle on one-dimensional equivalent length for Ste = 0.05, 0.15. شکل ۹. اثرات متقابل دمای هوا و زاویه سطح بر طول معادل یک بعدی در اعداد استکان Ste = 0.05, 0.15.

اثرات متقابل دمای هوا و زاویه سطح $(\theta_{air} - \gamma)$ در شکل (۹) به صورت تغییرات طول معادل به ازای تغییرات دمای هوا در سطوح آبدوست (خطوط قرمز) و آبگریز (خطوط مشکی)، در اعداد استکان 0.05 (خطوط ممتد) و 0.15 (خط چین) نشان داده شده است. در این شکل مزیت سطوح آبگریز در طولانی کردن زمان انجماد کاملاً مشخص است. اما میزان اثربخشی این عامل تابع دمای محیط است. در هوای گرم زمانی که سطح سرد بیشترین نقش را در انجماد قطره آب دارد، آبگریزی سطح حدود 30% طول معادل قطره را افزایش می‌دهد. در محیط سرد زمانی که بخشی از حرارت از مسیر هوا دفع می‌شود، اثربخشی زاویه تماس به حدود 23% کاهش می‌یابد. یکی از نکات قابل توجه در شکل (۹)، حساسیت ناچیز طول معادل به دمای سطح (عدد استکان) در محیط سرد است (سمت چپ شکل). لازم به ذکر است اثرات عدد استکان در تعریف طول معادل (رابطه (۴۱)) گنجانده شده است. بنابراین در انجماد آب در شرایط کاملاً یک بعدی (مطابق شکل (۲))، طول یک بعدی می‌بایست مستقل از عدد استکان باشد. میزان وابستگی طول یک بعدی به عدد استکان در شکل (۹) نشان دهنده تفاوت شرایط انجماد نسبت به حالت یک بعدی است.

این بخش به بررسی اثرات دمای هوا (θ_{air}) ، دمای سطح (Ste) و شرایط آبدوستی سطح (γ) بر روی طول معادل قطره می‌پردازد. در مواجهه با مجموعه‌ای از عوامل موثر، روش بررسی یک فاکتور در هر مرحله^۱ نه تنها از نظر حجم محاسبات بهینه نیست بلکه قادر به تشخیص اثرات متقابل عوامل موثر نیز نخواهد بود. از این رو در این پژوهش از روش آزمایش عاملی کامل^۲ برای ارزیابی عوامل موثر استفاده شده است. برای این منظور محدوده مشخص شده در جدول (۱) برای عوامل موثر در انجماد قطره آب در نظر گرفته شده است. طرح آزمایش عاملی کامل برای ۳ عامل موثر، شامل ۹ شبیه‌سازی است. مقادیر پارامترها و طول معادل بدست آمده از هر شبیه‌سازی (پاسخ) در جدول (۲) فهرست شده است.

جدول ۱. عوامل موثر در انجماد قطره آب و محدوده تغییرات آنها.

Table 1. Simulation factors and their ranges.

Parameters	Lower limit	Upper limit
Ste	0.05	0.15
θ_{air}	-1	1
γ	$\pi/3$	$2\pi/3$

جدول ۲. طرح شبیه‌سازی و طول یک بعدی معادل بدست آمده برای هر یک از شبیه‌سازی‌ها.

Table 2. Simulation design and obtained one-dimensional equivalent length for each simulation.

Simulation	Ste	θ_{air}	γ	L_{1D}^*
1	0.0500	-1.0	$\pi/3$	0.69282
2	0.1500	-1.0	$\pi/3$	0.69282
3	0.0500	1.0	$\pi/3$	1.09545
4	0.1500	1.0	$\pi/3$	1.18743
5	0.0500	-1.0	$2\pi/3$	0.84853
6	0.1500	-1.0	$2\pi/3$	0.86603
7	0.0500	1.0	$2\pi/3$	1.42127
8	0.1500	1.0	$2\pi/3$	1.50997
9	0.1000	0.0	$\pi/2$	0.97980

تحلیل آماری نتایج می‌تواند تاثیر عوامل و همچنین اثرات متقابل آنها را بر نتایج مشخص سازد. شکل (۸) خلاصه نتایج را به صورت نمودار پارتو^۳ نشان داده است. در این نمودار عوامل و اثرات متقابل آنها بر اساس میزان تاثیر مرتب شده‌اند. با توجه به این نمودار، دمای بی‌بعد شده هوا (θ_{air}) و زاویه تماس سطح (γ) بیشترین تاثیر را بر طول معادل دارند. رتبه سوم نیز متعلق به اثر متقابل این دو عامل خواهد بود $(\theta_{air} - \gamma)$. عدد استکان و اثر متقابل آن با دمای هوا $(Ste - \theta_{air})$ در رتبه‌های بعدی قرار دارند. بر اساس شکل (۸) از تاثیر سایر عوامل بر طول معادل می‌توان صرف نظر نمود.

1. One factor at a time
2. Full factorial experiment
3. Pareto chart

سنجش زمان انجماد معرفی گردد. در ادامه به کمک روش آمایش عاملی، تاثیر عوامل موثر بر انجماد ارزیابی گردید. تحلیل آماری نتایج نشان داد دمای هوای محیط و زاویه تماس (به صورت انفرادی و به صورت متقابل) بیشترین تاثیر را بر انجماد قطره آب خواهد داشت. در نهایت به کمک برازش عددی، رابطه‌ای تقریبی ارائه شده است که می‌تواند با هزینه محاسباتی بسیار ناچیز، طول معادل قطره را پیش بینی نماید.

۶ - فهرست علائم

c	ظرفیت گرمای ویژه ($m^2 s^{-2} K^{-1}$)
e	اینرسی حرارتی ($kgs^{-2.5} K^{-1}$)
F_L	ضریب مایع
F_S	ضریب جامد
Fo	فوریه
H	آنتالپی به ازای واحد حجم ($kgm^{-1} s^{-2}$)
k	ثابت رسانندگی حرارتی ($kgms^{-3} K^{-1}$)
L_{1D}	طول یک بعدی معادل قطره
L_h	گرمای نهان ($m^2 s^{-2}$)
Ste	استفان
t	زمان (s)
T	دما (K)
u	سرعت (ms^{-1})

حروف یونانی

α	ضریب نفوذ حرارتی ($m^2 s^{-1}$)
γ	زاویه تماس (rad)
θ	دمای پی بعد شده
ρ	چگالی (kgm^{-3})
ϑ	لزجت سینماتیکی ($m^2 s^{-1}$)

بالانویس‌ها

* کمیات پی بعد

زیرنویس‌ها

air	هوا
eff	موثر
m	ذوب
num	عددی
wall	دیوار
water	آب

۷ - مراجع

[1] M. Strub, O. Jabbour, F. Strub, and J. P. Bédécarrats, "Experimental study and modelling of the crystallization of a water droplet", International Journal of Refrigeration, Vol. 26, No. 1, pp. 59–68, 2003.

[2] S. Suzuki et al., "Freezing of water droplets on silicon surfaces coated with various silanes", Chemical Physics Letters, Vol. 445, No. 1–3, pp. 37–41, 2007.

[3] A. G. Marín, O. R. Enríquez, P. Brunet, P. Colinet, and J. H. Snoeijer, "Universality of Tip Singularity Formation in Freezing Water Drops", Phys. Rev. Lett., Vol. 113, No. 5, p. 054301, 2014.

[4] F. Feuillebois, A. Lasek, P. Creismas, F. Pigeonneau, and A. Szaniawski, "Freezing of a Subcooled Liquid Droplet", Journal of Colloid and Interface Science, Vol. 169, No. 1, pp. 90–102, 1995.

[5] S. Tabakova and F. Feuillebois, "On the solidification of a supercooled liquid droplet lying on a surface", Journal of Colloid and Interface Science, Vol. 272, No. 1, pp. 225–234, 2004.

[6] J. D. Blake, D. S. Thompson, D. M. Raps, and T. Strobl, "Simulating the Freezing of Supercooled Water Droplets

کانتورهای طول یک بعدی در شکل (۱۰) افزایش وابستگی به عدد استفان را در دماهای بالای محیط به وضوح نشان می‌دهد. علت این امر می‌تواند به نقش هوا در انجماد آب مرتبط باشد. در محیط سرد، جریان حرارت همواره از آب به سمت هوا است. در مقابل در هوای گرم، ابتدا حرارت از هوا به آب منتقل می‌شود اما به تدریج با تاثیر پذیری سریع هوا از دمای سطح سرد، دمای هوا به پایین‌تر از دمای آب خواهد رسید. تغییر شدت و سمت و سوی انتقال حرارت میان آب و هوا در چنین محیطی، تفاوت میان انجماد قطره و انجماد لایه آب را تشدید می‌کند که اثرات آن به صورت وابستگی طول یک بعدی به عدد استفان نمود می‌یابد.

در انجماد قطره به کمک برازش عددی می‌توان رابطه‌ای برای پیش‌بینی طول معادل برحسب عوامل موثر ارائه نمود.

$$L_{1D}^* = 0.623276 + 0.495466(Ste) + 0.103651(\theta_{air}) + 0.233305(\gamma) + 0.407979(Ste\theta_{air}) \quad (42)$$

جهت بررسی اعتبار معادله (۴۲) حالت‌های دیگری مطابق جدول (۳) در نظر گرفته شده و در هر مورد، نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی با مقدار پیش‌بینی شده در رابطه (۴۲) مقایسه گردیده است. تطبیق خوب نتایج شبیه‌سازی با رابطه تقریبی (۴۲) موید دقت قابل ملاحظه این رابطه است.

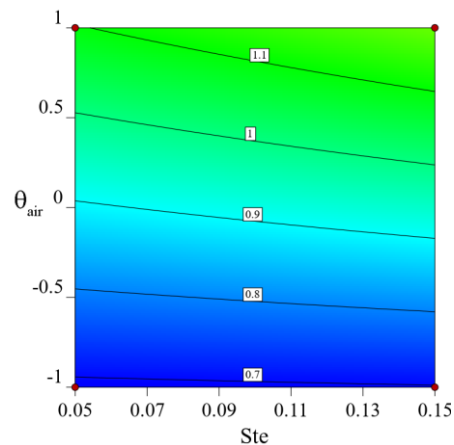


Fig. 10. The contours of one-dimensional equivalent length for different values of air temperature and Stefan numbers.

شکل ۱۰. کانتورهای طول معادل یک بعدی به ازای مقادیر متفاوت دمای هوا و عدد استفان.

جدول ۳. ارزیابی رابطه (۴۲) با نتایج حاصل از شبیه‌سازی.

Table 3. Comparing the results of Eq. (42) with numerical simulations.

Ste	θ_{air}	γ	L_{1D}^* Eq. (42)	L_{1D}^* LBM simulation	Error
0.08	0.5	$\pi/2.57$	1.06	1.05	1%
0.11	-0.3	$\pi/1.8$	1.00	0.94	6%
0.07	-0.6	$\pi/1.63$	0.94	0.89	5.6%

۵ - جمع بندی

انجماد قطره‌های آب بر روی سطوح تابع عوامل متعدد محیطی است. دمای سطح، دمای هوای احاطه کننده قطره آب و زاویه تماس میان قطره و سطح مهم ترین عواملی است که در این تحقیق مورد بررسی قرار گرفته است. روش عددی مورد استفاده، لئیس-بولتزمن است. در این تحقیق با تطبیق مدل انرژی آزاد با تغییر حالت مایع-جامد تلاش شده است تا شبیه‌سازی‌ها لئیس-بولتزمن با سازگاری ترمودینامیکی بیشتری نسبت به تحقیق‌های پیشین به انجام رسد. وجود تشابه میان حل یک بعدی و تغییرات ضخامت یخ در قطره این فرصت را مهیا ساخته است تا با تعریف مفهوم جدیدی تحت عنوان طول یک بعدی معادل قطره، معیار مناسبی برای

- dimensional stationary and moving walls in flow and nonflow lattice Boltzmann simulations*", Phys. Rev. E, Vol. 98, No. 2, p. 023304, 2018.
- [23] A. J. Briant and J. M. Yeomans, "Lattice Boltzmann simulations of contact line motion. II. Binary fluids", Phys. Rev. E, Vol. 69, No. 3, p. 031603, 2004.
- [24] R. Huang, H. Wu, and P. Cheng, "A new lattice Boltzmann model for solid-liquid phase change", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 59, pp. 295–301, 2013.
- Impacting a Cooled Substrate*", in 52nd Aerospace Sciences Meeting, National Harbor, Maryland: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2014.
- [7] T. V. Vu, G. Tryggvason, S. Homma, and J. C. Wells, "Numerical investigations of drop solidification on a cold plate in the presence of volume change", International Journal of Multiphase Flow, Vol. 76, pp. 73–85, 2015.
- [8] H. Zhang, Y. Zhao, R. Lv, and C. Yang, "Freezing of sessile water droplet for various contact angles", International Journal of Thermal Sciences, Vol. 101, pp. 59–67, 2016.
- [9] D. H. Rothman and J. M. Keller, "Immiscible cellular-automaton fluids", J Stat Phys, Vol. 52, No. 3–4, pp. 1119–1127, 1988.
- [10] X. Shan and H. Chen, "Lattice Boltzmann model for simulating flows with multiple phases and components", Phys. Rev. E, Vol. 47, No. 3, pp. 1815–1819, 1993.
- [11] J. Sun, J. Gong, and G. Li, "A lattice Boltzmann model for solidification of water droplet on cold flat plate", International Journal of Refrigeration, Vol. 59, pp. 53–64, 2015.
- [12] J. Zhao, X. Li, and P. Cheng, "Lattice Boltzmann simulation of a droplet impact and freezing on cold surfaces", International Communications in Heat and Mass Transfer, Vol. 87, pp. 175–182, 2017.
- [13] W. Xiong and P. Cheng, "Numerical investigation of air entrapment in a molten droplet impacting and solidifying on a cold smooth substrate by 3D lattice Boltzmann method", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 124, pp. 1262–1274, 2018.
- [14] X. Zhao, B. Dong, and W. Li, "Analysis of freezing process about falling droplet using the lattice Boltzmann method", HFF, Vol. 28, No. 10, pp. 2442–2462, 2018.
- [15] P. Xu, S. Xu, Y. Gao, and P. Liu, "A multicomponent multiphase enthalpy-based lattice Boltzmann method for droplet solidification on cold surface with different wettability", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 127, pp. 136–140, 2018.
- [16] X. He and G. D. Doolen, "Thermodynamic Foundations of Kinetic Theory and Lattice Boltzmann Models for Multiphase Flows", Journal of Statistical Physics, Vol. 107, No. 1/2, pp. 309–328, 2002.
- [17] M. R. Swift, W. R. Osborn, and J. M. Yeomans, "Lattice Boltzmann Simulation of Nonideal Fluids", Phys. Rev. Lett., Vol. 75, No. 5, pp. 830–833, 1995.
- [18] X. Zhang, X. Liu, X. Wu, and J. Min, "Simulation and experiment on supercooled sessile water droplet freezing with special attention to supercooling and volume expansion effects", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 127, pp. 975–985, 2018.
- [19] X. Zhang, X. Wu, J. Min, and X. Liu, "Modelling of sessile water droplet shape evolution during freezing with consideration of supercooling effect", Applied Thermal Engineering, Vol. 125, pp. 644–651, 2017.
- [20] A. Kuzmin, M. Januszewski, D. Eskin, F. Mostowfi, and J. J. Derksen, "Simulations of gravity-driven flow of binary liquids in microchannels", Chemical Engineering Journal, Vol. 171, No. 2, pp. 646–654, 2011.
- [21] J. Y. Shao, C. Shu, H. B. Huang, and Y. T. Chew, "Free-energy-based lattice Boltzmann model for the simulation of multiphase flows with density contrast", Phys. Rev. E, Vol. 89, No. 3, p. 033309, 2014.
- [22] O. R. Mohammadipour, S. Succi, and H. Niazmand, "General curved boundary treatment for two-and three-